

Коммунальное хозяйство городов

УДК 539.4.015 : 539.411 : 539.422.23 : 624.046

В.Н.РУДАКОВ, канд. техн. наук

*Харьковская национальная академия городского хозяйства***О ЦИКЛОИДЕ КАК МЕХАНИЗМЕ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ СЖАТОГО
В ГИПОТЕТИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОЙ ОБОЙМЕ ПОЛИКРИСТАЛЛА
В РАМКАХ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ МИКРОПОЛЯРИЗОВАННОЙ
СРЕДЫ**

В рамках механики разрушения микрополяризованной среды с использованием инвариантов тензора и девиатора напряжений на основе важнейших свойств циклоиды разработан математический аппарат оценки перехода напряженного состояния поликристалла из равновесного в критическое.

Если рассматривать поведение основных конструкционных поликристаллов, независимо от области их применения и вида напряжённого состояния, даже в условиях простого нагружения, на современном уровне развития науки и техники мы не сможем в полной мере ни описать механизм их разрушения, ни установить точный резерв их несущей способности.

В механике деформируемого твёрдого тела принято считать, что самыми простейшими и доступными для понимания являются одноосные напряжённые состояния: осевое сжатие (растяжение) и срез.

Но если для конструкционной стали или чугуна с таким мнением можно (частично) согласиться только в рамках осевого сжатия (растяжения), то уже при определении достоверного сопротивления этих материалов на срез возникают определённые и теоретические, и практические трудности.

Если же рассматривать каменные породы – конструкционный бетон и твёрдые горные породы, то здесь уже при осевом сжатии нужно решать непростой вопрос относительно обработки торцов опытных образцов: смазывать их или нет?

При испытании бетонных образцов на осевое растяжение возникают серьёзнейшие технологические трудности по их центровке, а методики определения сопротивления бетона на срез практически не существует.

Теперь рассмотрим поведение опытного образца поликристалла (независимо от его генезиса) при его осевом сжатии безинерционной нагрузкой. По мере её роста образец деформируется и в продольном, и в поперечном направлениях.

Количественно меру деформации в продольном направлении можно оценить линейным модулем деформации E , а в поперечном – коэффициентом Пуассона ν , значения которых для разных материалов

меняются. Например, для конструкционной стали $\nu = 0,26 \dots 0,30$; АС – $\nu = 0,32 \dots 0,33$; конструкционного бетона – $\nu = 0,10 \dots 0,16$ и т.д. За исключением абсолютно твёрдого тела, все реальные поликристаллы (либо кристаллические твёрдые тела) ведут себя аналогичным образом.

Однако механизмы деформирования поликристаллов даже в простейших условиях теорией не установлены, хотя для анализа НДС поликристалла они крайне необходимы.

Поэтому в дальнейшем синтезированные продольные усилия при осевом сжатии (растяжении) рекомендуется называть результирующими сопротивлениями, определяемые сопротивлениями поликристалла на чистый сдвиг R_s и «отрыв» «С» (чистое сцепление) вдоль огибающих плоскостей скольжения.

Направление плоскостей скольжения поликристалла (кристаллического тела) относительно плоскости действия внешней осевой нагрузки определяется углом скольжения Φ , равным углу наклона боковой грани структурного элемента к основанию.

В качестве структурного элемента (жёсткой совокупности атомов) поликристалла, независимо от типа химической связи (ковалентной, ионной или металлической), принят «искажённый» октаэдр Паулинга [1]. «Искажённость» октаэдра выражается в сжатии-растяжении его формы вдоль продольной оси «а-а».

Следующим важнейшим фактором принятой модели поликристалла является ориентационная микрополяризуемость структурных элементов в процессе нагружения поликристалла, т.е. образования под действием механических напряжений дипольного момента (векторная величина) единицы объема поликристалла, с последующим, за счёт этого, поворотом оси «а-а» каждого структурного элемента (по аналогии магнитной стрелки), равнонаправленно (коллинеарно) вектору внешней нагрузки [2]. Такая особенность поведения структурного поликристалла под нагрузкой определяет одно из важнейших свойств модели микрополяризованной среды и принципиально отличает её от гипотетической модели сплошной среды.

Так как одной из наиболее важных задач механики разрушения является определение физических постоянных и параметров прочности для образцов поликристалла, соответствующих практически действующим нагрузкам как для простых лабораторных испытаний, так и для реальных конструкций, необходимо провести тщательный анализ, с использованием инвариантов тензора и девиатора напряжений, аналитического аппарата механики разрушения микрополяризованной

среды и основных свойств «родоначальницы» вариационного исчисления – циклоиды, для образцов поликристаллов, в которых под действием граничных нагрузок может произойти нарушение равновесного состояния, вызывающее разрушение.

При этом одновременно с исследованием критерия прочности поликристалла рассмотрим и механизм поперечного расширения.

Для этого опытный образец поликристалла поместим в гипотетическую жесткую (недеформируемую) цилиндрическую обойму с идеально гладкими стенками.

В момент равновесного состояния, т.е. когда внешние силы будут уравновешены внутренними, состояния боковых стенок гипотетической обоймы достигают критического уровня и в закритическом состоянии они полностью потеряют своё функциональное назначение.

Оценку напряжённого состояния образца поликристалла при осевом сжатии в гипотетической обойме выполним на основе теории Надаи [3-6], согласно которой октаэдрические касательные напряжений $\tau_{\text{окт}}$ в предельном состоянии текучести (разрушения) являются функцией октаэдрического нормального напряжения $\sigma_{\text{окт}}$, т.е.

$$\tau_{\text{окт}} = f_1(\sigma_{\text{окт}}), \quad (1)$$

где

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (2)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 - \text{главные нормальные напряжения}, \quad (3)$$

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (4)$$

или

$$\sigma_{\text{окт}} \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \Pi_s}, \quad (5)$$

$$\sigma_{\text{окт}} \equiv \frac{1}{3} I_\sigma, \quad (6)$$

Π_s – второй инвариант девиатора напряжений [6]:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2), \quad (7)$$

I_σ – линейный инвариант тензора напряжений:

$$I_\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3 \sigma_{\text{окт}}, \quad (8)$$

S_1, S_2, S_3 – главные значения девиатора напряжений:

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma_0, \quad (9)$$

$$S_2 = \sigma_2 - \sigma_0, \quad (10)$$

$$S_3 = \sigma_3 - \sigma_0. \quad (11)$$

В рамках механики разрушения МПС предлагается обобщённый критерий Надаи вида

$$\Pi_s = \frac{1}{3}(mI_\sigma)^2, \quad (12)$$

где I_σ – то же, что в (8); m – фрикционный параметр:

$$m = f_2(\Phi). \quad (13)$$

Для практического пользования критерий вида (12) преобразуем с учётом равенства (3). Таким образом

$$\sigma_1 + 2\sigma_3 = 3\sigma_0, \quad (14, a)$$

$$\sigma_1 - \sigma_0 = 2\sigma_0 - 2\sigma_3 = 2(\sigma_0 - \sigma_3), \quad (14, б)$$

$$S_1 = -2S_3. \quad (14, в)$$

Введя (14) в (7), получим

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \left[(-2S_3^2) + S_3^2 + S_3^2 \right] = 3S_3^2, \quad (15)$$

а (8) в правую часть (12):

$$3S_3^2 = 3m^2\sigma_0^2, \quad (16, a)$$

$$S_3^2 = m^2\sigma_0^2, \quad (16, б)$$

$$|S_3| = m\sigma_0. \quad (16, в)$$

Для определения фрикционного параметра m (13) принимаем граничное условие вида:

$$0 \leq \Phi_i \leq 90^\circ, \quad (17)$$

где Φ – угол скольжения реальных кристаллических тел в границах «идеальная жидкость – абсолютно твёрдое тело». К идеальным текучим средам принадлежат все газы и большинство жидкостей (вода, спирт и др.) Абсолютно твёрдое тело – естественная абстракция, как жёсткая система точек, в которых независимо от напряжённого состояния взаимное расположение отдельных (соседних) точек не изменяется [7].

На рис.1 приведена развёртка циклоиды на плоскости $\sigma_0 OS_3$ производящим кругом радиусом $R = |S_3|$ и, соответственно, диаметром $D = |S_1|$.



$$y(S_3) = -x(\sigma_0) \operatorname{tg} \phi / 2 \text{ при } 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

$$R = |OA| = |S_3|; D = |OB| = |S_1|$$

Рис.1 – Основные свойства нормали MN к циклоиде

В качестве параметра циклоиды принят угол $\angle MCN = \Phi$, который по абсолютному значению для четверти циклоиды соответствует граничным условиям (17) [8, 9].

«Обращение» к циклоиде связано, в первую очередь, с тем, что она позволяет раскрыть природу (механизм) образования деформаций в условиях простого нагружения поликристалла. Суть его раскрывается просто, если приравнять функционально совокупность жёстких структурных элементов производящему кругу, который скользит без трения вдоль направляющей плоскости скольжения. При этом он совершает сложное движение (перемещение), представляющее комбинацию двух простых: вращательного и поступательного (теоремы Эйлера, Шаля, Пуансо). Такое перемещение называют винтовым и оно проявляется на внешних поверхностях сжатых (растянутых) образцов в форме полос (линий) скольжения Чернова-Людерса [3-5, 10, 11].

Следовательно, уравнение (16, в) в полной мере эквивалентно уравнению нормали циклоиды и его окончательно можно записать в виде:

$$S_3 = -\sigma_0 \operatorname{tg} \Phi / 2, \quad (18, a)$$

$$|S_3| = \sigma_0 \operatorname{tg} \Phi / 2. \quad (18, б)$$

Для опытной проверки зависимости (18) с учётом (3) и равенства

$$K_0 = \sigma_3 / \sigma_1, \quad (19)$$

где K_0 – коэффициент бокового давления в абсолютно жёсткой обойме, преобразуем уравнение (19) к виду

$$K_0 = (1 - \operatorname{tg} \Phi / 2) / (1 + 2 \operatorname{tg} \Phi / 2), \quad (20)$$

а затем выразим параметр $\operatorname{tg} \Phi / 2$ через коэффициент Пуассона ν в форме

$$\operatorname{tg} \Phi / 2 = (1 - 2\nu) / (1 + \nu), \quad (21)$$

и наоборот:

$$\nu = (1 - \operatorname{tg} \Phi / 2) / (2 + \operatorname{tg} \Phi / 2). \quad (22)$$

Например, для конструкционной стали при

$\nu = 0,28;$	$\Phi = 37,9^\circ$	$\sin \Phi = 0,615;$
$\nu = 0,285;$	$\Phi = 37^\circ$	$\sin \Phi = 0,602;$
$\nu = 0,29;$	$\Phi = 36,07^\circ$	$\sin \Phi = 0,589;$
$\nu = 0,295;$	$\Phi = 35,14^\circ$	$\sin \Phi = 0,576;$

Следовательно, при осевом растяжении тонкой стальной пластины результирующим напряжением $\sigma_p = \sigma_T$ сопротивление стали срезу достигнет уровня (рис.2)

$$R_s = \sigma_T \cdot \sin \Phi, \quad (23)$$

который подтверждается экспериментально [12].

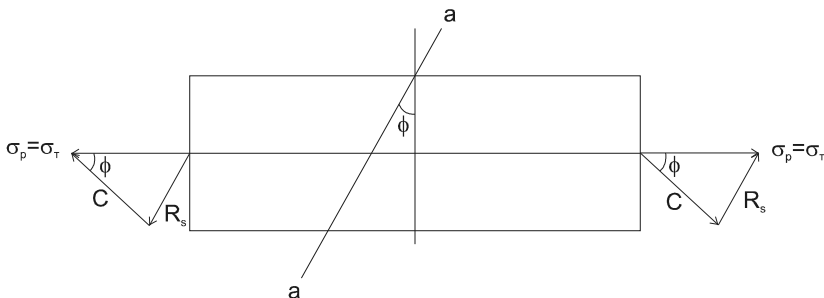


Рис.2 – Схема распределения внутренних усилий при осевом растяжении:
|C| – молекулярное сцепление; |R_s| – сопротивление стали срезу.

Для конструкционного бетона и горных пород аналогичные результаты приведены в работе [13].

- 1.Паулинг Л. Природа химической связи: Пер.с англ. – М.-Л.: Госхимиздат, 1947. – 440 с.
- 2.Физика. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М.Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 944 с.
- 3.Надаи А. Пластичность и разрушение твёрдых тел.: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1954. – 647 с.
- 4.Филин А. П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. Т.1. – М.: Наука, 1975. – 832 с.
- 5.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
- 6.Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т.2.: Пер. с англ.; Под ред. А.Ю.Ишлинского. – М.: Мир, 1975. – С.336-520.
- 7.Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2-х т. Т.1. Статика и кинематика. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
- 8.Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Гл. ред. физ.-матем. лит.-ры, 1986. – 192 с.
- 9.Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике.– М.: Наука, 1964. – 872 с.
- 10.Столяров Я.В. Введение в теорию железобетона. – М.-Л.: Стройиздат Наркомстроя, 1941. – 448 с.
- 11.Раус Э. Динамика системы твердых тел: Пер. с англ. В 2-х т. Т.1. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
- 12.Теория пластичности / Под ред. Ю.Н.Работнова. – М.: ИЛ., 1948. – 452 с.
- 13.Рудаков В.Н. К определению пределов прочности бетона на осевое сжатие, растяжение и сдвиг при проектировании и реконструкции сталежелезобетонных конструкций // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып.42. – К.: Техніка, 2002. – С.69-74.

Получено 28.10.2007